UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

MA1116 abril-julio de 2009

Ejercicios sugeridos para :

los temas de las clases del 28 y 30 de abril de 2009.

Temas :
Métodos de Gauss y Gauss-Jordan.
Sistemas homogéneos y no homogéneos.
Matrices equivalentes por filas. Matriz identidad. Matriz inversa.
Secciones1.4, 1.7, 1.8 del texto (*)
[(*) S.Grossman : "Algebra lineal" 5a edición]

E1. Explique por qué un sistema homogéneo siempre es consistente.

E2. Considere las dos siguientes afirmaciones :
(i) Todo sistema con más incógnitas que ecuaciones, tiene infinitas soluciones;
(ii) Todo sistema homogéneo con más incógnitas que ecuaciones, tiene infinitas soluciones;
Explique por qué la primera afirmación es falsa mientras que la segunda es verdadera.

E3. (opcional) Sean A, B matrices de tamaño, respectivamente, (m, n), (n, k) [por ejemplo, considere matrices de tamaño (2, 3), (3, 4)] ; demuestre que para todo número , k, se tiene, al efectuar una multiplicación de matrices "filas por columnas" : k(A.B)= (kA).B = A.(kB), es decir que, como en la usual multiplicación de números, una constante numérica, k, que multiplica al producto, se puede multiplicar por (uno) cualquiera de los factores.

E4. Demuestre que :
(i) si $\mathbf{x_1}$ es solución de un sistema homogéneo, $\mathbf{Ax}= \mathbf{0}$, entonces, para todo número, k, también $k\mathbf{x_1}$ es solución del mismo sistema;
(ii) si $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$, son soluciones de un sistema homogéneo, $\mathbf{Ax}= \mathbf{0}$, entonces, la suma, $\mathbf{x_3}= \mathbf{x_1}+\mathbf{x_2}$ también es solución del mismo sistema;
(iii) si $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$, son soluciones de un sistema homogéneo, $\mathbf{Ax}= \mathbf{0}$, y h, k números cualesquiera, entonces $\mathbf{x_4}= h\mathbf{x_1}+k\mathbf{x_2}$ tambien es solución del mismo sistema;
(iv) si $\mathbf{x_1}$ es solución de un sistema <u>no</u> homogéneo, $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ ($\neq\mathbf{0}$) , entonces, para todo número, $k\neq 1$ $k\mathbf{x_1}$ <u>no</u> es solución del mismo sistema;
(v) si $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$, son soluciones de un sistema <u>no</u> homogéneo, $\mathbf{Ax}= \mathbf{b}$ ($\neq\mathbf{0}$) , y h, k números cualesquiera, entonces $\mathbf{x_5}=h\mathbf{x_1}+k\mathbf{x_2}$ es solución del mismo sistema <u>si y sólo si</u> $h+k = 1$.
[sugerencia : use álgebra de matrices, expresando, por ejemplo, el hecho que $\mathbf{x_1}$ es solución de un sistema $\mathbf{Ax}= \mathbf{b}$, con el hecho que la matriz producto "filas por columnas" $A\mathbf{x_1}$ es igual a la matriz $\mathbf{b}$]

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

MA1116 abril-julio de 2009

E5.- Resuelva los siguientes sistemas homogéneos :

5a) $\begin{cases} 2x+3y-z = 0 \\ 3x-y+7z=0 \end{cases}$ **5b)** $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-2y+3z=0 \\ x+4y-z=0 \\ 3y-2z=0 \\ 2x+5y=0 \end{cases}$

5c) $\begin{cases} x+y=0 \\ x-2y+3z=0 \\ 2x+7y-z=0 \end{cases}$ **5d)** $2x_1+3x_2-x_3+4x_4+x_5 = 0$.

E6. Defina "matriz inversa de una matriz cuadrada".

E7. Demuestre que si A, B son matrices de tamaño (nxn) y si se cumple que $AB=I_n$, entonces el sistema $B\mathbf{x}= \mathbf{0}$ tiene solución única. [sugerencia : suponga que $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$ sean soluciones y, usando álgebra de matrices, verifique que entonces necesariamente $\mathbf{x_1}=\mathbf{x_2}$] .

E8. Demuestre que un sistema $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ de n ecuaciones lineales en n incógnitas [cuya matriz de coeficientes por lo tanto es "cuadrada" , de tamaño (nxn)], tiene solución única si y sólo si la matriz A es equivalente por filas a la matriz identidad, I_n . [sugerencia : averigüe lo que pasa cuando al resolver el sistema con el método de Gauss Jordan se reduce la matriz A a su forma escalonada reducida].

E9. Demuestre que si una matriz, A, de tamaño nxn, tiene inversa, A^{-1} , entonces necesariamente la matriz A es equivalente por filas a la matriz identidad I_n .
[sugerencia : ponga en evidencia que si A tiene inversa, entonces el sistema $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ tiene solución única (a saber, el vector columna nulo) y por consiguiente, recordando el ejercicio anterior, la matriz A es equivalente por filas a la matriz identidad, I_n .

E10. Dé un ejemplo de matriz de tamaño 2x2 que no tenga inversa. Justifique.

E11.- Para cada una de las siguientes matrices averigüe si tiene o no tiene inversa y en caso afirmativo halle la inversa.

E11a) $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$; **E11b)** $B=\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -12 & 1 \end{bmatrix}$; **E11c)** $C=\begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 6 & 15 \end{bmatrix}$; **E11d)** $D=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$;

E11e) $E=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; **E11f)** $F=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; **E11g)** $G=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$; **E11h)** $H=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR **MA1116 abril-julio de 2009**
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

E12.- Verifique si es cierto o falso que la inversa de la matriz A, de tamaño 2x2

$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ es : $\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$, suponiendo que $ac-bd\neq 0$.

E13. Demuestre que si las tres matrices de tamaño (nxn), A, B, C cumplen con las condiciones : $AB= I_n= BC$, siendo I_n la matriz identidad de tamaño (nxn) , entonces necesariamente A=C [sugerencia : use álgebra de matrices].

E14. demuestre que si las matrices A, B, de tamaño nxn , tienen inversa entonces AB, A^n también tienen inversa y además : **a**) $(AB)^{-1}= B^{-1}A^{-1}$,
b) para todo número entero positivo, n : $(A^n)^{-1}= (A^{-1})^n$.

E15.- Dé un ejemplo de matrices A, B con inversa, tales que:
15a) $(AB)^{-1}\neq A^{-1}B^{-1}$;
15b) $(A+B)^{-1} \neq A^{-1}+B^{-1}$.

E16.- (opcional) Dada una matriz A, equivalente por filas a la matriz identidad, I_n , demuestre que si cierta matriz A' (de tamaño nxn) cumple con $AA' = I_n$, entonces se tiene también $A'A=I_n$ [de lo cual sigue que A' es la matriz inversa de A].

E17. Diga si es cierto o falso que una matriz de tamaño nxn tiene matriz inversa si y sólo si llevándola (mediante operaciones elementales de fila) a la forma escalonada reducida, se obtiene la matriz identidad I_n. Explique.

respuestas

SE1. Se puede observar que un sistema homogéneo siempre tiene (almenos) la solución nula. Otra posibilidad es observar que como la última columna de la matriz aumentada siempre es nula, nunca se presenta la situación de una fila nula en la matriz de los coeficientes con un número no nulo en la misma fila de la matriz aumentada.

SE2. "más incógnitas que ecuaciones" implica que en la matriz (de los coeficientes) escalonada siempre habrá almenos una columna sin pivote. Por lo tanto, **si el sistema es consistente**, habrá un número infinito de soluciones. En (ii) se garantiza que el sistema es consistente, mientras que en (i) no.

Por ejemplo el sistema $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+2y+2z=3 \end{cases}$ tiene más incógnitas que ecuaciones sin embargo, siendo inconsistente, no tiene infinitas soluciones.

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

MA1116 abril-julio de 2009

SE3. Dadas las matrices $A=[a_{ij}]$, $B=[b_{ij}]$, $C=AB=[c_{ij}]$, de tamaños, respectivamente, (2,3), (3,4), (2,4) , la genérica componente de la matriz C, producto de A por B "filas por columnas", se puede expresar con $c_{ij} = \sum_{t=1}^{3} a_{it}b_{tj} = a_{i1}b_{1j}+a_{2}b_{2j}+a_{i3}b_{3j}$;

por lo tanto se tiene : $k\, c_{ij} = (k\, a_{i1})b_{1j}+(k\, a_{i2})b_{2j}+(k\, a_{i3})b_{3j}$ lo cual pone en evidencia que

$(kA)B=kC$,

y análogamente $k\, c_{ij} = a_{i1}(k\, b_{1j})+a_{i2}(k\, b_{2j})+a_{i3}(k\, b_{3j})$ lo cual pone en evidencia que

$A(kB)= kC$

SE4. (i) Como $\mathbf{x}_1$ es solución del sistema $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ **,** la matriz producto (filas por columnas) $A\mathbf{x}_1$ es una matriz columna nula, luego : $A(k\mathbf{x}_1)=k(A\mathbf{x}_1)=k\mathbf{0}=\mathbf{0}$, luego $k\mathbf{x}_1$ es solución del mismo sistema;

(ii) $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ soluciones $\Rightarrow$ $A\mathbf{x}_1=\mathbf{0}$, $A\mathbf{x}_2=\mathbf{0}$ $\Rightarrow$ $A(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2)=A\mathbf{x}_1+A\mathbf{x}_2=\mathbf{0}+\mathbf{0} = \mathbf{0} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2$ solución;

(iii) $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ soluciones $\Rightarrow$ $A\mathbf{x}_1=\mathbf{0}$, $A\mathbf{x}_2=\mathbf{0}$ $\Rightarrow$ $A(h\mathbf{x}_1+k\mathbf{x}_2)=hA\mathbf{x}_1+kA\mathbf{x}_2=h\mathbf{0}+k\mathbf{0} = \mathbf{0} \Rightarrow$

$h\mathbf{x}_1+k\mathbf{x}_2$ solución;

(iv) $A\mathbf{x}_1=\mathbf{b}\neq\mathbf{0}$ $\Rightarrow$ $A(k\mathbf{x}_1)=k\mathbf{b} \neq \mathbf{b}$ (si $k\neq 1$) ;

(v) $A(h\mathbf{x}_1+k\mathbf{x}_2)=hA\mathbf{x}_1+kA\mathbf{x}_2= h\mathbf{b}+k\mathbf{b} = (h+k)\mathbf{b}$ [$= \mathbf{b}$ sólo si $h+k=1$].

SE5. **5a)** $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 7 & 0 \end{array}\right] \; R_2 \to R_2 - R_1 \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -4 & 8 & 0 \end{array}\right] \; R_1 \leftrightarrow R_2 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 8 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow \ldots \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{20}{11} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{10}{11} & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} -\frac{20}{11} \\ \frac{10}{11} \\ 1 \end{bmatrix} = b \begin{bmatrix} 20 \\ -10 \\ -11 \end{bmatrix}$ [siendo a, b constantes arbitrarias];

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

MA1116 abril-julio de 2009

5b) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \ldots \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5/3 & 0 \\ 0 & 1 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} -\frac{5}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix} = b \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$;

5c) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & -1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \ldots \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$;

5d) [es un sistema homogéneo de una sola ecuación y cinco incógnitas]
$[2\ 3\ -1\ 4\ 1 \mid 0] \Rightarrow [1\ \ 3/2\ \ -1/2\ \ 2\ \ 1/2 \mid 0] \Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(3/2)a+(1/2)b-2c-(1/2)d \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \chi \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \delta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

siendo a, b, c, d, α, β, χ, δ , constantes arbitrarias.

SE6. Una matriz, B, de tamaño nxn, se dice <u>inversa</u> de A si y sólo si se tiene : $BA=AB=I_n$. Obsérvese que como el producto de matrices **no** es conmutativo, podríamos sospechar que existan matrices A, B, de tamaño nxn tales que fuera : $AB= I_n$, $BA\neq I_n$. Sin embargo tomando en cuenta algunos de los ejercicios que siguen, se puede averiguar que : si A, B son matrices de tamaño nxn, es suficiente que se cumpla $AB=I_n$ para que tambien se cumpla $BA=I_n$. Esto convalida la manera que usamos para calcular la matriz inversa de una matriz cuadrada dada, resolviendo $[A|I_n] \Rightarrow \ldots \Rightarrow [I_n|B] \Rightarrow$ B= inversa de A= A^{-1} .

SE7. Si $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}$ son soluciones del sistema $B\mathbf{x}=\mathbf{0}$, entonces $B\mathbf{x_1}= \mathbf{0} = B\mathbf{x_2}$ luego multiplicando a la izquierda por A se tiene : $AB\mathbf{x_1}= A\mathbf{0} = AB\mathbf{x_2}$, luego $I_n\mathbf{x_1}= I_n\mathbf{x_2}$ por lo cual $\mathbf{x_1}= \mathbf{x_2}$.

SE8. Actuémos con convenientes operaciones elementales de fila sobre la matriz aumentada, hasta que la matriz de los coeficientes quede en su forma escalonada reducida, A*.
[recordemos que entonces A, A* son equivalentes por filas].
El sistema tiene solución única si y sólo si en toda columna de A* hay un pivote. Como A* es "cuadrada" y escalonada reducida, esto es posible si y solo si $A^*= I_n$.

SE9. Si A es matriz cuadrada, nxn y tiene inversa, A^{-1} , entonces $A^{-1}A= I_n$ y por el resultado del ejercicio **E7** el sistema $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ tiene solución única. Luego, por el resultado del ejercicio **E8** , A es equivalente por filas a la matriz identidad, I_n .

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

MA1116 abril-julio de 2009

SE10. Por lo visto en el ejercicio anterior, bastará considerar una matriz que no sea equivalente por fila a la matriz I_2 , por ejemplo $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, cuya forma escalonada reducida por filas es $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq I_2$.

SE11. C no tiene inversa ya que su matriz escalonada reducida no es I_2 ;
H no tiene inversa por que es de tamaño 2x3 ;
$A^{-1}=\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$; $B^{-1}=\frac{1}{89}\begin{bmatrix} 1 & -7 \\ 12 & 5 \end{bmatrix}$; $D^{-1}=\begin{bmatrix} -5 & -2 & 6 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; $E^{-1}=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 4 & -5 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$;
$F^{-1}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 4 & -2 & 0 \\ -3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$; $G^{-1}=\begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

SE12. Es cierto. Basta verificar que $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix}$.

SE13. $AB= I_n= BC \Rightarrow A =AI_n= A(BC)=(AB)C=I_nC = C$.

SE14.a) Basta verificar que $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = I_n =(B^{-1}A^{-1})(AB)$;
Por ejemplo : $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = ((AB)B^{-1})A^{-1}= (A(BB^{-1})A^{-1}= (AI_n)A^{-1}=AA^{-1}=I_n$.
b) podemos verificar que $(A^n)^{-1}= (A^{-1})^n$ por inducción :
Sea P(n) la propiedad "$(A^n)^{-1}= (A^{-1})^n$" . Verificaremos que P(1) es cierta y que suponiendo cierta P(s) para un genérico entero positivo, s, por consiguiente resulta cierta tambien P(s+1).
En efecto P(1) se escribe : $(A^1)^{-1}= (A^{-1})^1$ y como para toda matriz cuadrada, H, se define $H^1= H$, tenemos que P(1) se cumple;
supongamos ahora cierta P(s), es decir, supongamos que sea cierto $(A^s)^{-1}= (A^{-1})^s$;
como A^{s+1} se define como $(A^s)A$, tenemos entonces, tomando en cuenta **E14a** :
$(A^{s+1})^{-1}= ((A^s)A)^{-1}= (A^{-1})(A^s)^{-1}=$ [por la hipótesis inductiva $(A^s)^{-1}= (A^{-1})^s$]
$= (A^{-1})(A^{-1})^s = (A^{-1})^{s+1}$.
[Nota : hemos admitido que si H es una matriz cuadrada, entonces $(H^s)H=H(H^s)$.
intente usted demostrarlo por inducción]

SE15a) Sean $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; entonces $A^{-1}=\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$; $B^{-1}= B$;

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

MA1116 abril-julio de 2009

AB= $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$, $A^{-1}B^{-1}$= $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$; $(AB)(A^{-1}B^{-1})$ = $\begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 7 & -16 \end{bmatrix} \neq I_2$.

15b) Sean $A=B=I_2$; entonces $A^{-1}=B^{-1}=A=B$; $(A+B) = 2I_2$; $(A+B)^{-1}=\frac{1}{2} I_2$;
$A^{-1}+B^{-1}= 2I_2 \neq \frac{1}{2} I_2$.

SE16) Observemos que :
i) [recuerde el ejercicio **E7**] $AA'=I_n$ tiene como consecuencia que el sistema $A'\mathbf{x}=\mathbf{0}$ tiene solución única.
En efecto , si $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ son soluciones de este sistema, entonces $A'\mathbf{x}_1=A'\mathbf{x}_2$ y multiplicando ambos miembros a mano izquierda por A : $A(A'\mathbf{x}_1)=A(A'\mathbf{x}_2) \Rightarrow (AA')\mathbf{x}_1=(AA')\mathbf{x}_2 \Rightarrow I_n\mathbf{x}_1=I_n\mathbf{x}_2 \Rightarrow \mathbf{x}_1=\mathbf{x}_2$;
ii) [recuerde el ejercicio **E8**] Si el sistema $A'\mathbf{x}=\mathbf{0}$ tiene solución única, entonces la forma escalonada reducida de la matriz A' es necesariamente I_n ;
iii) si la forma escalonada reducida de A' es la matriz I_n , entonces es posible hallar, con el método de Gauss-Jordan, usando la matriz aumentada $[A' | I_n]$, otra matriz, A'', tal que $A'A''=I_n$;
iv) entonces necesariamente A''=A , ya que se tiene : $A=A(A'A'')=(AA')A''=I_nA''=A''$;
v) en definitiva resulta que : $AA'=I_n =A'A''=A'A$.

SE17. Por el ejercicio **E16** si A es equivalente por filas a I_n entonces A tiene matriz inversa; inversamente, si A tiene inversa, vimos en el ejercicio **E9** que A es equivalente por filas a la matriz I_n.